コンピュータグラフィックスS 講義資料 第8回 座標変換（1）

九州工業大学 情報工学部 システム創成情報工学科 講義担当：尾下真樹

1. 座標変換

座標変換は、コンピュータグラフィックスにおける重要な基礎技術である。座標変換にはさまざまな応用があるが、特に、コンピュータグラフィックスにおいては、レンダリングの際に、モデル座標系で表された頂点座標を、スクリーン座標系での座標に変換するために用いられる。

座標変換において特に重要になるのが、モデル座標系からカメラ座標系への変換を実現するための視野変換であり、同次座標変換（アフィン変換）と呼ばれる変換を用いて実現する。

同次座標変換では、3次元空間の頂点座標を（x, y, z, w）の4次元の同次座標ベクトル（通常は w =1）で表し、4×4行列 $\mathbf{A}$ をかけることで座標変換を適用する。座標変換は、右のような式で書ける。

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

適切な行列 $\mathbf{A}$ を用いることでさまざまな変換が実現できるが、以下では、特に重要となる回転・平行移動とその組み合わせについてまとめる。（その他の変換については、講義での説明、講義スライド、教科書を参照のこと。）

1.1. 回転行列

以下のような行列（左上3×3成分に回転成分に適切な値を設定した行列）を用いることで、回転を適用できる。

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & 0 \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

具体的な行列は

x 軸周りの回転変換 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　y 軸周りの回転変換 $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　z 軸周りの回転変換 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ など。

回転行列の要素は、平面における回転後の座標を考えることで、求めることができる。例えば x 軸周りの回転であれば、yz 平面上における、(0,1,0)や(0,0,1)の回転後の座標を考えれば、行列を求めることができる。

1.2. 平行移動行列

以下のような行列（右端の列に適切な値を設定した行列）を用いることで、座標を (T_x, T_y, T_z) 動かす平行移動を適用できる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

左辺を計算すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+T_x \\ y+T_y \\ z+T_z \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、平行移動が適用されていることが分かる。

1.3. 複数の行列の組み合わせ

以下のように、複数の行列をかけることで、複数の平行移動や回転を組み合わせて適用することができる。このとき、変換行列は、右に書かれた行列から左に書かれた行列の順番（ $\mathbf{A}_0$ から $\mathbf{A}_n$ の順番）で適用されることに注意する。

$$\mathbf{A}_n \cdots \mathbf{A}_i \cdots \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

このとき、行列の積を最初に計算して1つの行列を求めておけば、その行列をかけるだけで複数の変換をまとめて適用できる。

また、ある座標系 C1 から別の座標系 C2 への変換行列 $\mathbf{A}$ があるとき、逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めることで、座標系 C2 から座標系 C1 への逆方向の座標変換を得ることができる。

例えば、モデルが（0,0,5）の位置にあり、ワールド座標系の y 軸を中心として 90 度回転している向きにあるとき、モデル座標系からワールド座標系への変換行列（モデルを適切な位置に回転・移動する変換行列）による座標変換は、以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

この場合、回転変換を先に適用することに注意する。（先に平行移動を適用すると、平行移動にまで次の回転が適用され、(0,0,5)ではなく(5,0,0)の位置にモデルがあることになるため。）また、2 つの行列の順番、及び、平行移動成分・回転成分の符号を逆にすると、もとの行列の逆行列になるため、逆方向の変換であるワールド座標系からモデル座標系への座標変換列が求まる。