

# コンピュータグラフィックスS

## 第9回 変換行列(2)

システム創成情報工学科 尾下 真樹

### 今日の内容

- 前回の復習
- 変換行列の復習・応用
  - 前回の演習問題
  - 追加の演習問題
- OpenGLプログラミング
  - 変換行列の設定

### 前回の復習

### 変換行列による座標変換(復習)

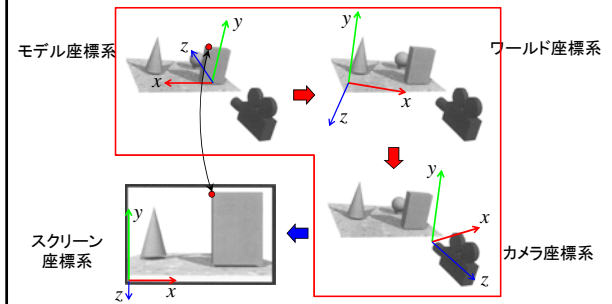
- 視野変換(アフィン変換) + 射影変換(透視変換)
  - 最終的なスクリーン座標は  $(x'/w' \ y'/w' \ z'/w')$

$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ r-l & & & \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ t-b & & & \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ f-n & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\ R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\ R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

射影変換 (カメラ→スクリーン)      視野変換 (モデル→カメラ)      モデル座標系での頂点座標 → ↓ → スクリーン座標系での頂点座標

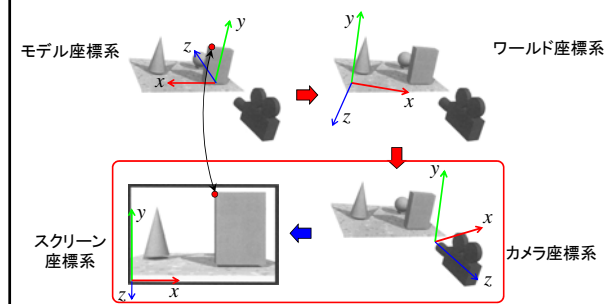
### 視野変換(アフィン変換)

- モデル座標系からカメラ座標系に変換



### 射影変換

- カメラ座標系からスクリーン座標系に変換



### アフィン変換

- アフィン変換(同次座標系変換)
  - 4 × 4行列の演算によって、3次元空間における回転・平行移動・拡大縮小などの処理を計算
  - 同次座標系
    - (x, y, z, w)の4次元座標値によって扱う
    - 3次元座標値は(x/w, y/w, z/w)で計算(通常は w = 1)

$$\begin{pmatrix} R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\ R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\ R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

### 回転変換

- 回転変換
  - 原点を中心とする回転を表す

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & 0 \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{00}x + R_{01}y + R_{02}z \\ R_{10}x + R_{11}y + R_{12}z \\ R_{20}x + R_{21}y + R_{22}z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 回転変換の行列

- 回転変換の行列の導出方法
  - 各軸を中心として右ねじの方向の回転(軸の元から見て反時計回り方向の回転)を通常使用
  - yz平面、xz平面、xy平面での回転を考えれば、2次元平面での回転変換と同様に求められる
  - 2次元平面での回転行列は、高校の数学の内容

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X軸を中心とする回転変換 Y軸を中心とする回転変換 Z軸を中心とする回転変換

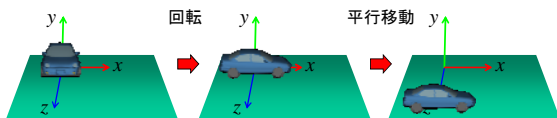
### 平行移動

- 平行移動
  - (Tx, Ty, Tz)の平行移動
    - 4 × 4行列を用いることで、平行移動を適用することができる

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 行列演算の適用

- 回転・移動の組み合わせの例

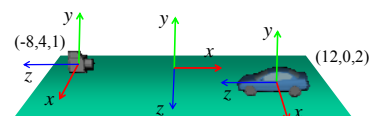


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

先に適用する方が右側になることに注意!

### 演習問題1

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
  - ワールド座標系に対して、モデルが(12,0,2)の位置にあり、Y軸を中心に-90度回転している
  - ワールド座標系に対して、カメラが(-8,4,1)の位置にあり、Y軸を中心に-90度回転している

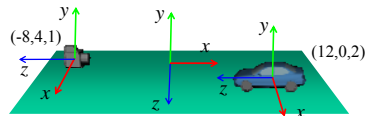


### 解答

- モデル座標系→カメラ座標系への変換

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系      モデル座標系→ワールド座標系



### 解答(検算)

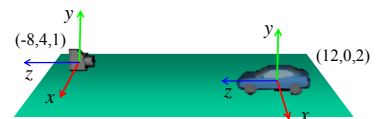
- 検算

一行列を実際に計算してみる

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

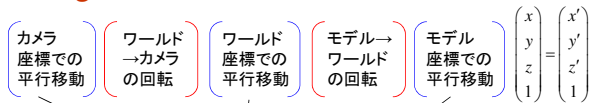
この場合、モデル座標系とカメラ座標系の向きが同じなので、結果的に単なる平行移動になっていることに注目

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

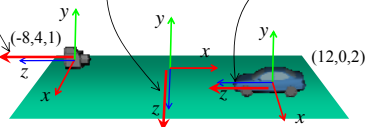


### 平行移動の適用位置(復習)

- 平行移動を適用する順番により、結果は変わる



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$



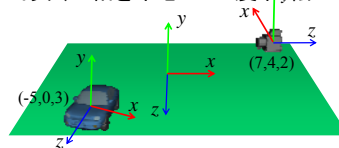
### 前回の演習問題

### 演習問題

- 変換行列
  - 変換行列
  - 変換行列の検算

### 演習問題

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
  - ワールド座標系に対して、モデルが(-5, 0, 3)の位置にあり、Y軸を中心に-30度回転している
  - ワールド座標系に対して、カメラが(7, 4, 2)の位置にあり、Y軸を中心に90度回転している



### 演習問題

#### 1. 変換行列を求める

- モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求める
- 行列の積の形で表現

#### 2. 検算

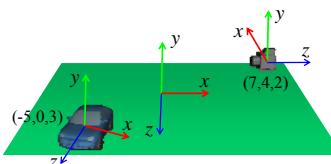
- 変換行列(行列の積)を計算
- いくつかの座標に適用してみて、結果を確認
- (0, 0, 0) に座標変換を適用
- (0, 0, 1) に座標変換を適用

### 解答

#### • モデル座標系→カメラ座標系への変換

$$\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & 0 & \sin(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-30^\circ) & 0 & \cos(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系          モデル座標系→ワールド座標系



### 解答

#### • 行列を実際に計算してみる

$$\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & 0 & \sin(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-30^\circ) & 0 & \cos(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

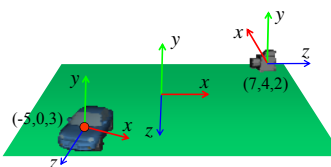
$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & -0.87 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0.87 & 0 & -0.5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 解答(検算)

#### • (0, 0, 0) に座標変換を適用

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

奥のやや左下になっている

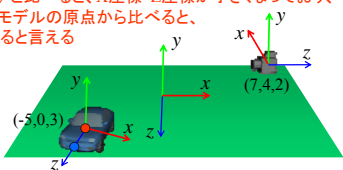


### 解答(検算)

#### • (0, 0, 1) に座標変換を適用

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 - 1 \\ -4 \\ -1/2 - 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.87 \\ -4 \\ -12.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

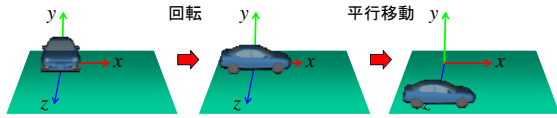
(-1.0, -4.0, -12.0) と比べると、X座標・Z座標が小さくなっており、カメラから見て、モデルの原点から比べると、左奥の位置にあると言える



### 変換行列の復習・応用

### 行列演算の適用(復習)

- 回転・移動の組み合わせの例



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

先に適用する方が右側になることに注意!

### 行列計算の適用順序(復習)

- 行列演算では可換則は成り立たないことに注意!

$$AB \neq BA$$

- 行列の適用順序によって結果が異なる

- 例:

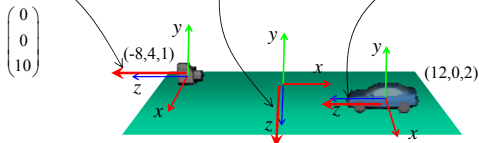
- 回転 → 平行移動
- 平行移動 → 回転

### 平行移動の適用位置

- 平行移動を適用する順番により、結果は変わる

- カメラ座標系での移動、モデル座標系での移動

$$\begin{pmatrix} \text{カメラ座標での平行移動} \\ \text{ワールド} \rightarrow \text{カメラの回転} \\ \text{ワールド座標での平行移動} \\ \text{モデル} \rightarrow \text{ワールドの回転} \\ \text{モデル座標での平行移動} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$



### 複数の回転をかけるときの注意

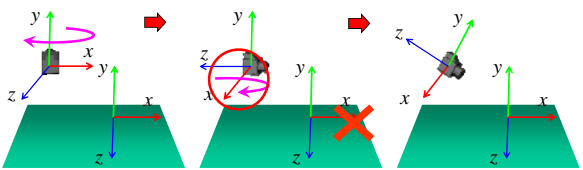
- 2回目以降の回転は、各回転は、前の回転がかかった後の座標系で適用されることに注意

### 複数の回転をかける例(1)

- Y軸周りの回転 → X軸周りの回転

- 2回目のX軸周りの回転は、ワールド座標系のX軸ではなく、最初の回転を適用したあとのカメラ座標系のX軸周りの回転となる

Y軸を中心とした回転      X軸を中心とした回転

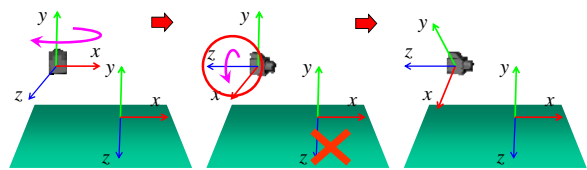


### 複数の回転をかける例(2)

- Y軸周りの回転 → Z軸周りの回転

- 同じく、2回目のZ軸周りの回転は、ワールド座標系のZ軸ではなく、最初の回転を適用したあとのカメラ座標系のZ軸周りの回転となる

Y軸を中心とした回転      Z軸を中心とした回転



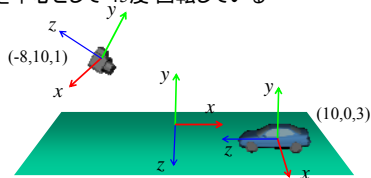
### 複数の回転をかけるときの注意

- 最終的に決めたい向きに応じて、どのような順番・角度で変換行列を適用するのが適切かを考えて、決める必要がある

### 追加の演習問題

### 演習問題

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
  - 物体の位置が(10,0,3)にあり、Y軸を中心として-90度回転している
  - カメラの位置が(-8,10,1)にあり、Y軸を中心として-90度、Z軸を中心として45度回転している



### 解答

- 解答

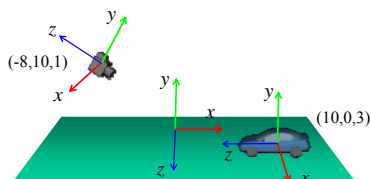
$$\begin{matrix} \text{X軸周りの回転} & \text{Y軸周りの回転} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系      モデル座標系→ワールド座標系

### 解答

- モデル座標系→ワールド座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

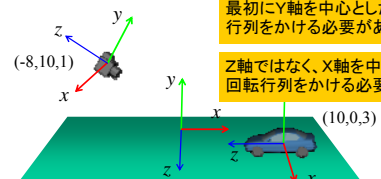


### 解答

- ワールド座標系→カメラ座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最初にY軸を中心とした回転行列をかける必要がある  
Z軸ではなく、X軸を中心とした回転行列をかける必要がある



### 解答

- 2つの回転行列の適用

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y軸を中心とした回転      X軸を中心とした回転

### 解答

- 注意点
- 2番目の回転では、ワールド座標系でみるとZ軸を中心に回転しているが、カメラ座標系ではX軸を中心に回転している

Y軸を中心とした回転      X軸を中心とした回転

### 解答

- 図から分かるように、回転についてはカメラ座標系のX軸を中心に -45度 回転するのと同じ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 解答

- 最初と2回目の回転は打ち消しあう点に注目

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系      モデル座標系→ワールド座標系

回転同士は打ち消し合うが、左側の回転変換行列は平行移動変換にも影響を与えるので、きちんと計算する必要がある

### 検算

- 前の問題と同様の検算を行う
- (各自でやっておくこと)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0.7 & -0.7 & 5.6 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & -19.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 解答(誤答)

- 間違いの多い例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z軸ではなく、X軸を中心とした回転行列をかける必要がある

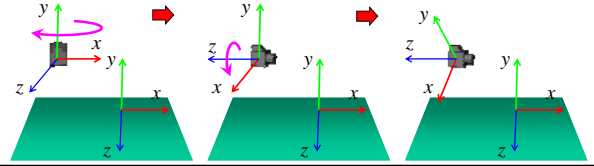
最初にY軸を中心とした回転行列をかける必要がある

解答(誤答1)

$$\begin{pmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系のZ軸を中心として回転するつもりが、カメラ座標系のZ軸を中心とした回転が適用されてしまう

Y軸を中心とした回転      Z軸を中心とした回転

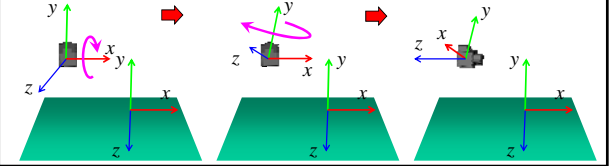


解答(誤答2)

$$\begin{pmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ 0 & \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系のY軸を中心として回転するつもりが、カメラ座標系のY軸を中心とした回転が適用されてしまう

X軸を中心とした回転      Y軸を中心とした回転

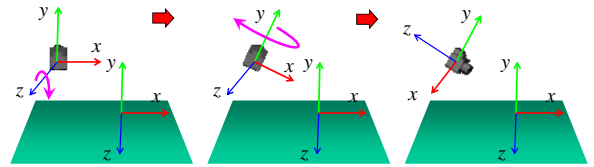


解答(誤答3)

$$\begin{pmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2回目の回転は、ワールド座標系ではなくローカル座標系のY軸を中心とした回転になるが、この場合、1回目の回転でちょうど傾きの方向が90度ずれているので(カメラがX軸ではなくZ軸を中心に回転している)、結果はたまたま合う

Z軸を中心とした回転      Y軸を中心とした回転



解答(誤答3)

• 解答

今回はどちらも同じ結果になる (こちらの方が意味的には正しい)

X軸周りの回転      Y軸周りの回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ 0 & \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系      モデル座標系→ワールド座標系

• 誤答(たまたま同じ計算結果になるが間違い)

Y軸周りの回転      Z軸周りの回転

$$\begin{pmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

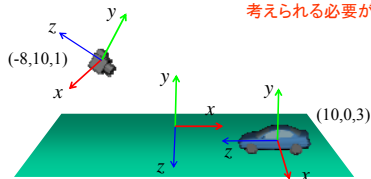
ワールド座標系→カメラ座標系      モデル座標系→ワールド座標系

別解

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-45) & -\sin(-45) & 0 \\ 0 & \sin(-45) & \cos(-45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系      モデル座標系→ワールド座標系  
カメラ座標系→ワールド座標系の逆行列 (右側と同じ形になっているところに注目)

逆行列を使わない方法で考えられる必要がある



OpenGLプログラミング  
変換行列の設定

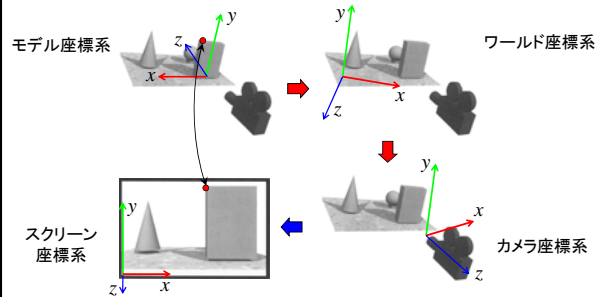


### 変換行列の設定

- OpenGLは、内部に変換行列を持っている
  - モデルビュー変換行列
  - 射影変換行列
    - 両者は別に扱った方が便利なので、別々に設定できるようにになっている
- OpenGLの関数を呼び出すことで、これらの変換行列を変更できる

### 座標変換(復習)

- モデル座標系からスクリーン座標系への変換



### 変換行列による座標変換(復習)

- 視野変換(アフィン変換) + 射影変換(透視変換)
  - 最終的なスクリーン座標は  $(x'/w' \ y'/w' \ z'/w')$

$$\begin{pmatrix} 2n & 0 & r+l & 0 \\ r-l & 0 & r-l & 0 \\ 0 & 2n & t+b & 0 \\ 0 & t-b & t-b & 0 \\ 0 & 0 & -(f+n) & -2fn \\ 0 & 0 & f-n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\ R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\ R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

射影変換 (カメラ→スクリーン)      視野変換 (モデル→カメラ)      モデル座標系での頂点座標      ↓      ↑      スクリーン座標系での頂点座標

### 座標変換の設定(復習)

- 自分のプログラムから OpenGLやDirectXに、2つの変換行列を設定する
  - ワールド座標からカメラ座標系への視野変換
    - カメラの位置・向きや、物体の位置向きに応じて、適切なアフィン変換行列を設定
    - さまざまな状況で、適切な変換行列を設定できるように、十分に理解しておく必要がある
  - カメラ座標系からスクリーン座標系への射影変換
    - 透視変換行列は、通常、固定なので、最初に一度だけ設定
    - 視野角やスクリーンサイズなどを適切に設定

### 変換行列の設定のための関数

- 設定を行う変換行列の指定
  - glMatrixMode()
    - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
  - 主に視野変換の設定に使われる関数
    - glLoadIdentity(), glTranslate(), glRotate(), 他
  - 射影変換行列の設定に使われる関数
    - gluPerspective(), glFrustum(), glOrth(), 他

### 変換行列の指定

- glMatrixMode( mode )
  - 設定する変換行列を指定する
  - GL\_MODELVIEW
    - モデルビュー変換(視野変換) (モデル座標系からカメラ座標系への変換)
  - GL\_PROJECTION
    - 射影変換(投影変換) (カメラ座標系からスクリーン座標系への変換)

### 変換行列の設定のための関数

- 設定を行う変換行列の指定
  - glMatrixMode()
  - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
  - 主に視野変換の設定に使われる関数
    - glLoadIdentity(), glTranslate(), glRotate(), 他
  - 射影変換行列の設定に使われる関数
    - gluPerspective(), glFrustum(), glOrth(), 他

### 変換行列の変更

- glLoadIdentity()
  - 単位行列で初期化
- glTranslate( x, y, z )
  - 平行移動変換をかける
- glRotate( angle, x, y, z )
  - 指定した軸周りの回転変換をかける
  - angle は、1回転を360として指定

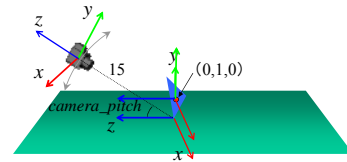
### 変換行列の変更

- 変換行列は順番に右側にかけていく
  - プログラムで後から記述した変換行列の方が、実際には先に適用される

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_n$$

### サンプルプログラムの視野変換行列

- サンプルプログラムのシーン設定
  - カメラと水平面の角度(仰角)は camera\_pitch
  - カメラと中心の間の距離は 15
  - ポリゴンを (0,1,0) の位置に描画



### サンプルプログラムの視野変換行列

- モデル座標系 → カメラ座標系 への変換行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\text{camera\_pitch}) & -\sin(-\text{camera\_pitch}) & 0 \\ 0 & \sin(-\text{camera\_pitch}) & \cos(-\text{camera\_pitch}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

③
②
①

ワールド座標系 → カメラ座標系      モデル座標系 → ワールド座標系

- x軸周りの回転
- 2つの平行移動変換の位置に注意
  - 中心から15離れるということは、回転後の座標系でカメラを後方(z軸)に15下げることと同じ

### サンプルプログラムの変換行列の設定

- 描画処理(display())関数

```
// 変換行列を設定(ワールド座標系→カメラ座標系)
glMatrixMode( GL_MODELVIEW );
glLoadIdentity();
③ glTranslatef( 0.0, 0.0, - 15.0 );
② glRotatef( - camera_pitch, 1.0, 0.0, 0.0 );

// 地面を描画(ワールド座標系で頂点位置を指定)
.....

// 変換行列を設定(モデル座標系→カメラ座標系)
① glTranslatef( 0.0, 1.0, 0.0 );

// ポリゴンを描画(モデル座標系で頂点位置を指定)
.....
```

以降、視野変換行列を変更することを指定

単位行列で初期化

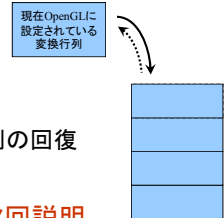
平行移動行列・回転行列を順にかけると、変換行列を設定

### その他の変換行列の設定関数

- glLookAt( カメラ位置, 目標位置, 上方ベクトル )
    - カメラと目標の位置で指定
    - 回転角度で向きを表す場合には向かない
  - glLoadMatrix( 配列 ), glMultMatrix( 配列 )
    - 配列を使って行列を直接設定 or かける
    - GL\_double m[4][4];
      - m[i][j] が行列の j 行 i 列の要素を表す
- ※ やや特殊な設定方法なので、本講義の演習では、これらの関数は使用しない

### 変換行列の退避・復元(1)

- 現在の変換行列を別領域(スタック)に記録しておき、後から復元することができる
  - glPushMatrix()
    - 現在の変換行列の退避
    - スタックに積む
  - glPopMatrix()
    - 最後に退避した変換行列の回復
    - スタックから取り出す
- ※ 具体的な使用例は次回説明

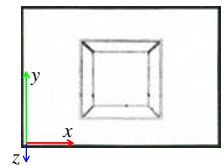


### 変換行列の設定のための関数

- 設定を行う変換行列の指定
  - glMatrixMode()
    - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
  - 主に視野変換の設定に使われる関数
    - glLoadIdentity(), glTranslate(), glRotate(), 他
  - 射影変換行列の設定に使われる関数
    - gluPerspective(), glFrustum(), glOrth(), 他

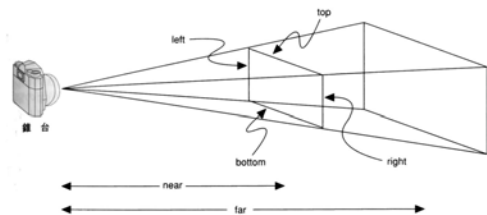
### 射影行列の変換

- 射影変換の種類
  - 透視射影
    - 現実の見え方をシミュレート
    - 遠くにあるものほど中央に寄って見える
  - 平行射影
    - 平行に射影
    - 図面などを描画する時に使用



### 透視射影変換

- glFrustum(手前面の大きさ, 手前面の距離, 奥面の距離)



### 透視変換(復習)

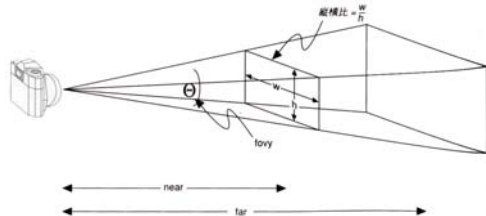
- 透視変換行列

$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'/w' \\ y'/w' \\ z'/w' \\ w' \end{pmatrix}$$

W' = -Z となり、Zで割ることになる (Z値が大きくなるほど中央になる)

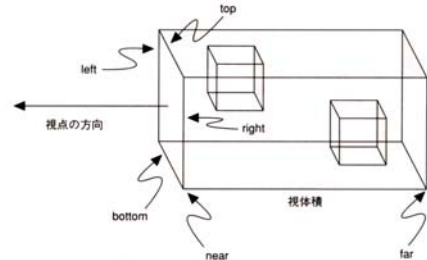
### 透視射影変換

- `gluPerspective` (視野角, 縦横比, 手前面距離, 奥面距離)
  - 視界領域が左右対称であるという前提で、より少ない引数で透視射影変換を設定する関数



### 平行射影変換

- `glOrtho` (描画範囲, 手前面の距離, 奥面の距離)



### 射影変換の設定(サンプルプログラム)

- ウィンドウサイズから変更された時に設定
  - 透視変換行列の設定(視野角を45度とする)

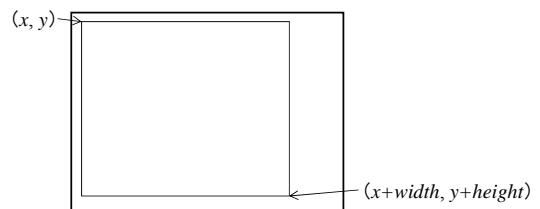
```
void reshape( int w, int h )
{
    // ウィンドウ内の描画を行う範囲を設定(ウィンドウ全体に描画)
    glViewport(0, 0, w, h);

    // カメラ座標系→スクリーン座標系への変換行列を以て以降、射影変換行列を変更することを指定
    glMatrixMode( GL_PROJECTION );
    glLoadIdentity();
    gluPerspective( 45, (double)w/h, 1, 500 );
}
```

以降、射影変換行列を変更することを指定  
単位行列で初期化  
透視変換を設定

### ビューポートの設定

- `glViewport( x, y, width, height )`
  - ウィンドウ内のどの範囲に描画を行うかを設定



### まとめ

- 前回の復習
- 変換行列の復習・応用
  - 前回の演習問題
  - 追加の演習問題
- OpenGLプログラミング
  - 変換行列の設定

### 次回予告

- OpenGL演習(AV講義室)
  - 視点操作の拡張
  - 変換行列を使ったアニメーション
- 前回までの演習が終っていなかった人がいれば、必ず終らせておくこと